

利用高精度迎风紧致群速度控制法模拟 激波与柱形界面相互作用*

姚清河, 陈耀钦, 薛莉, 朱庆勇
(中山大学应用力学与工程系, 广东广州 510275)

摘要: 利用带有群速度控制的迎风紧致法和 Level Set 法相结合, 对激波与柱形界面相互作用的二维可压缩流场进行了直接模拟, 并与实验结果相比较。从模拟结果看, 数值模拟的结果与实验结果基本相同, 正确地模拟出界面的位置、激波的强度和速度, 这表明文中给出的方法是合理可行的。

关键词: 流体界面; 群速度控制; 迎风紧致法; Level Set 法

中图分类号: O35 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2012) 03-0029-06

Simulation of Interaction of Shocks with a Cylinder Interface by Means of a High Order Accurate Upwind Compact Difference Scheme

YAO Qinghe, CHEN Yaoqin, XUE Li, ZHU Qingyong

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Two-dimensional compressible flows field for the interaction of shocks with the cylinder interface are directly simulated by using high order accurate upwind compact difference schemes with group velocity control combined with Level Set method. Numerical results are compared with the experimental observation. They show the right position of interface, right strength and velocity of shocks. The numerical results are satisfactory.

Key words: fluid interface; group velocity control; upwind compact finite difference scheme; level set method

众所周知, 对于气动方程, 不管初始值如何光滑, 其解都可能出现间断, 采用高于一阶精度格式求解激波问题时, 其数值解在激波附近都会产生非物理振荡。

在流场激波捕捉技术中, 已经发展了许多行之有效的办法, 如 TVD 格式、ENO 格式、WENO 格式、CSCM 格式、NND 格式、耗散比拟方法等^[1-7], 这些格式都有较高的精度和激波分辨率。群速度控制法从物理角度出发分析非物理振荡产生原因^[8-9], 并提出改进激波解的办法。在这个思想基础上, 本文从五阶迎风紧致格式出发, 引进一个函数用以控制数值解的群速度, 构造带有群速度控

制的五阶迎风紧致格式。该格式在激波前后表现为不同的性质, 使得激波前后的振荡向激波靠拢, 从而达到消除激波振荡的目的。同时, 文中进一步对所构造的格式的精度及数值解的行为进行了分析。

对于接触间断两边的流体, 一方面以上格式始终存在数值耗散而导致接触间断被抹平, 另一方面 Euler 方法在模拟时需要进行特别的处理, 如 MAC, VOF 和 Level Set 法等。本文在前人基础上, 采用五阶迎风紧致格式求解描述界面的 Level Set 方程, 采用 Ghost 法处理界面附近的边界条件^[10]。本方法在激波与柱形界面相互作用的计算中取得良好的结果, 数值结果与实验是吻合的。

* 收稿日期: 2011-10-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11072272)

作者简介: 姚清河 (1980 年生), 男, 师资博士后; 通讯作者: 朱庆勇; E-mail: mcszqy@mail.sysu.edu.cn

1 控制方程

1.1 流场控制方程

针对激波与流体界面相互作用的问题, 由欧拉坐标系中二维非定常可压缩守恒性 Euler 方程来描述流场。具体地

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}, E = \rho e + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}$$

流体的状态方程为

$$p = (\gamma - 1)(E - \rho/2(u^2 + v^2))$$

其中, ρ 是密度, u, v 分别是 x, y 方向上的速度分量, p 是流体压力, E 是单位体积流体的总能量, e 是比内能。

1.2 Level Set 方程

二维界面 Level Set 方程

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0 \quad (2)$$

其中, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 是 \mathbf{x} 到界面 $\Gamma(t)$ 的符号距离, $\mathbf{u} = (u, v)$ 是流体速度, t 是时间。但是, 由于数值方法的内在效应, 即使只进行了几个时间步求解, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 将不再满足符号距离函数的定义了。为了保持这一良好性质, 我们采用一种所谓重新初始化 (Reinitialization) 的手段^[11], 也就是要改造 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 使重新成为 \mathbf{x} 到界面 $\Gamma(t)$ 的符号距离。重新初始化方程如下

$$\begin{cases} \varphi_t + \text{sign}(\varphi_0)(\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} - 1) = 0 \\ \varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0 \end{cases} \quad (3)$$

其中符号函数 $\text{sign}(\varphi_0)$ 光滑化为 $\text{sign}(\varphi_0) =$

$$\frac{\varphi_0}{\sqrt{\varphi_0^2 + \varepsilon^2}}, \varepsilon \text{ 是小的正常数。}$$

2 数值方法

2.1 标量方程的空间离散方法

首先考虑如下的模型方程及对应的半离散化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, f = cu, c = \text{const} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = 0 \quad (5)$$

这里 $F_j/\Delta x$ 是一阶导数 $\partial f/\partial x$ 的差分逼近。考虑取如下五个网格点相联系的差分逼近^[11]

$$\omega_1 F_{j+1} + \omega_0 F_j + \omega_{-1} F_{j-1} = \beta_{-2} f_{j-2} + \beta_{-1} f_{j-1} + \beta_0 f_j + \beta_1 f_{j+1} + \beta_2 f_{j+2} \quad (6)$$

考虑如下情况: 假设 $c > 0$, 选定 ω_1 和 β_{-2} 为两个自由参数, 为简化计算将三对角形式的 (6) 式简化为两对角形式, 取 $\omega_1 = 0, \beta_{-2} = -\frac{1}{20}$, 可得其余 6 个系数

$$\omega_{-1} = \frac{2}{5}, \omega_0 = \frac{3}{5}, \beta_{-1} = -\frac{44}{60},$$

$$\beta_0 = \frac{36}{60}, \beta_1 = \frac{12}{60}, \beta_2 = -\frac{1}{60}$$

这样 (6) 式可写为

$$\frac{3}{5} F_j + \frac{2}{5} F_{j-1} =$$

$$\frac{1}{60} \delta_x^- (-f_{j+2} + 11f_{j+1} + 47f_j + 3f_{j-1}) \quad (7)$$

这里, $\delta_x^- f_j = f_j - f_{j-1}$, $\delta_x^+ f_j = f_{j+1} - f_j$ 。对 (7) 式进行 Taylor 级数展开后可得

$$\frac{F_j}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + O(\Delta x^5) \quad (8)$$

即逼近精度的量级为 Δx^5 。

简单采用 (7) 式, 该方法经过激波时存在非物理振荡。本文采用如下群速度控制方法以克服激波附近非物理振荡, 提高激波分辨率, 同时提高了光滑区的计算精度。本文在 (5) 式右端加入修正项以控制其群速度。

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = -\frac{\sigma \kappa_j}{\Delta x} \delta_x^0 [ss(u_j) |c| \delta_x^2 \delta_x^2 u_j] + \frac{\sigma \kappa_j}{2\Delta x} \delta_x^2 (|c| \delta_x^2 \delta_x^2 u_j), \sigma > 0 \quad (9)$$

其中 c 是声速, $ss(u_j) = \text{sign}(\delta_x^2 u_j \cdot \delta_x^0 u_j)$, $\delta_x^0 u_j = \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1})$, $\delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ 。在气动方程中 $ss(u_j)$ 可取 $ss(p_j)$, 这样可以使激波两侧振荡向激波靠拢, 从而克服非物理振荡, 提高激波解的分辨率。为了尽可能减小上述方法对流场光滑区的影响, 本文采用了限制函数

$$\kappa_j = \begin{cases} 1, & \text{if } \left| \frac{|\delta_x^+ u_j| - |\delta_x^- u_j|}{|\delta_x^+ u_j| + |\delta_x^- u_j|} \right| > \theta \\ 0, & \text{if } \left| \frac{|\delta_x^+ u_j| - |\delta_x^- u_j|}{|\delta_x^+ u_j| + |\delta_x^- u_j|} \right| \leq \theta \end{cases} \quad (10)$$

θ 是阈值, 在光滑区 $\kappa_j = 0$, 该格式的截断误差主

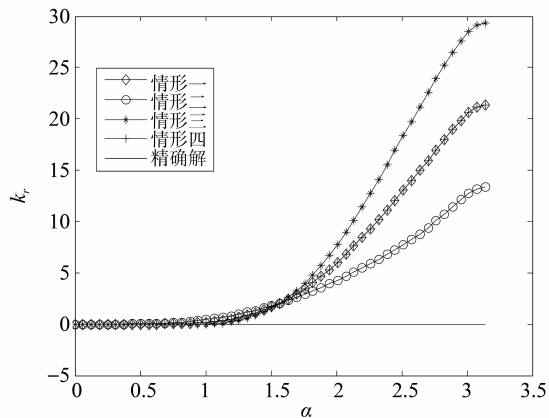


图 2 带群速度控制的五阶迎风紧致格式的耗散性质
Fig. 2 Dissipative relationship of the fifth order upwind compact difference scheme with group velocity control

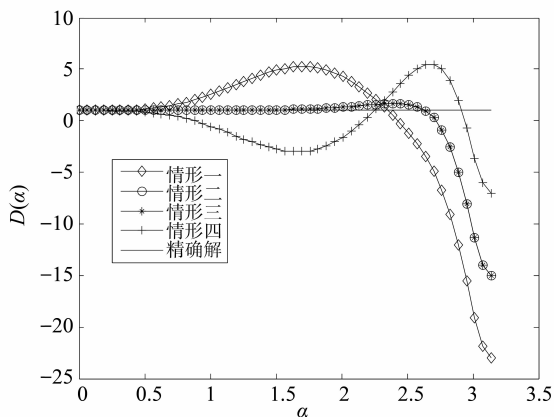


图 3 带群速度控制的五阶迎风紧致格式的群速度
Fig. 3 Group velocity of the fifth order upwind compact difference scheme with group velocity control

2.2 二维空间离散方法

在对实际流动问题进行数值模拟时, 往往会碰到区域边界形状复杂和物理变量在区域内变化大的情况。这时, 为了较好的进行模拟, 需要先建立曲线坐标网格, 即把不规则物理域先映射到规则计算域, 然后才能在计算域上进行差分计算。当然, 相应的流体力学方程组也需要变换到计算域。

假设物理域上的 (t, x, y) 到矩形计算域上的 (τ, ξ, η) 之间的坐标变换为

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y, t) \\ \eta = \eta(x, y, t) \\ \tau = t \end{cases} \quad (11)$$

则可以把方程 (1) 变换成如下方程

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (12)$$

其中

$$J = \begin{vmatrix} \tau_t & 0 & 0 \\ \xi_t & \xi_x & \xi_y \\ \eta_t & \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x, \bar{U} = U/J,$$

$\bar{F} = (\xi_t U + \xi_x F + \xi_y G)/J, \bar{G} = (\eta_t U + \eta_x F + \eta_y G)/J$ 在 (12) 式中, 流通量 \bar{F}, \bar{G} 关于 \bar{U} 的 Jacobian 矩阵为

$$A = \partial \bar{F} / \partial \bar{U}, B = \partial \bar{G} / \partial \bar{U} \quad (13)$$

通过矩阵 A, B 的特征值对矩阵 A, B 和流通量 \bar{F}, \bar{G} 进行分裂,

$$\begin{aligned} A^\pm &= R_\xi \Lambda_\xi^\pm R_\xi^{-1}, B^\pm = R_\eta \Lambda_\eta^\pm R_\eta^{-1}, \\ \bar{F}^\pm &= A^\pm \bar{U}, \bar{G}^\pm = B^\pm \bar{U} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $R_\xi, R_\xi^-, R_\eta, R_\eta^-$ 为相似变换矩阵。

特征值矩阵为

采用 Steger-Warming 通量分裂技术

$\Lambda_\xi^\pm = \text{diag}[(\lambda_\xi^l \pm (\lambda_\xi^l + \varepsilon^2)^{1/2})/2], l = 1, 2, 3, 4;$
 $\Lambda_\eta^\pm = \text{diag}[(\lambda_\eta^l \pm (\lambda_\eta^l + \varepsilon^2)^{1/2})/2], l = 1, 2, 3, 4$
逼近 (12) 式且具有群速度控制项的半离散差分格式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_{i,j}}{\partial \tau} + \frac{\bar{F}'_{i,j}}{\Delta \xi} + \frac{\bar{G}'_{i,j}}{\Delta \eta} = & \\ - \frac{\sigma}{\Delta \xi} \delta_\xi^0 (ss_\xi(p_{i,j}) |\lambda_{\xi(i,j)}| \delta_\xi^2 \delta_\xi^2 \bar{U}_{i,j}) + & \\ \frac{\sigma}{2\Delta \xi} \delta_\xi^2 (|\lambda_{\xi(i,j)}| \delta_\xi^2 \delta_\xi^2 \bar{U}_{i,j}) - & \\ \frac{\sigma}{\Delta \eta} \delta_\eta^0 (ss_\eta(p_{i,j}) |\lambda_{\eta(i,j)}| \delta_\eta^2 \delta_\eta^2 \bar{U}_{i,j}) + & \\ \frac{\sigma}{2\Delta \xi} \delta_\eta^2 (|\lambda_{\eta(i,j)}| \delta_\eta^2 \delta_\eta^2 \bar{U}_{i,j}) & \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\bar{F}'_{i,j} = \bar{F}'_{i,j}^+ + \bar{F}'_{i,j}^-, \bar{G}'_{i,j} = \bar{G}'_{i,j}^+ + \bar{G}'_{i,j}^-, \frac{\bar{F}'_{i,j}}{\Delta \xi},$

$\frac{\bar{G}'_{i,j}}{\Delta \eta}$ 分别是一阶导数 $\frac{\partial \bar{F}^\pm}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{G}^\pm}{\partial \eta}$ 的逼近式,

$$\begin{cases} \frac{3}{5} \bar{F}'_{i,j}^+ + \frac{2}{5} \bar{F}'_{i-1,j}^+ = \\ \frac{1}{60} \delta_\xi^- (-\bar{F}'_{i+2,j}^+ + 11\bar{F}'_{i+1,j}^+ + 47\bar{F}'_{i,j}^+ + 3\bar{F}'_{i-1,j}^+), \\ \frac{3}{5} \bar{F}'_{i,j}^- + \frac{2}{5} \bar{F}'_{i+1,j}^- = \\ \frac{1}{60} \delta_\xi^+ (-\bar{F}'_{i-2,j}^- + 11\bar{F}'_{i-1,j}^- + 47\bar{F}'_{i,j}^- + 3\bar{F}'_{i+1,j}^-) \\ \frac{3}{5} \bar{G}'_{i,j}^+ + \frac{2}{5} \bar{G}'_{i,j-1}^+ = \\ \frac{1}{60} \delta_\eta^- (-\bar{G}'_{i,j+2}^+ + 11\bar{G}'_{i,j+1}^+ + 47\bar{G}'_{i,j}^+ + 3\bar{G}'_{i,j-1}^+), \\ \frac{3}{5} \bar{G}'_{i,j}^- + \frac{2}{5} \bar{G}'_{i,j+1}^- = \\ \frac{1}{60} \delta_\eta^+ (-\bar{G}'_{i,j-2}^- + 11\bar{G}'_{i,j-1}^- + 47\bar{G}'_{i,j}^- + 3\bar{G}'_{i,j+1}^-) \end{cases}$$

2.3 Level Set 方程的离散方法

本文采用五阶迎风紧致格式对二维界面 Level Set 方程 (2) 式进行空间离散。重新初始化方程是一个 Hamilton-Jacobi 方程, 方程 (3) 可以写为如下形式:

$$\varphi_t + H(\varphi_x, \varphi_y) = 0 \quad (16)$$

这里 $H(\varphi_x, \varphi_y) = \text{sign}(\varphi_0) (\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} - 1)$ 。

方程 (16) 的半离散形式如下

$$\varphi_t = L(\varphi)_{i,j} = -\bar{H}(\varphi_{x_{i,j}}^+, \varphi_{x_{i,j}}^-, \varphi_{y_{i,j}}^+, \varphi_{y_{i,j}}^-) \quad (17)$$

其中 $\varphi_{x_{i,j}}^+, \varphi_{x_{i,j}}^-, \varphi_{y_{i,j}}^+, \varphi_{y_{i,j}}^-$ 分别是对 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 向右和向左偏斜的五阶紧致差分逼近。我们用局部 Lax-Friedrichs 格式求解上式。

$$\begin{aligned} \bar{H}(\varphi_{x_{i,j}}^+, \varphi_{x_{i,j}}^-, \varphi_{y_{i,j}}^+, \varphi_{y_{i,j}}^-) = & H\left(\frac{\varphi_{x_{i,j}}^+ + \varphi_{x_{i,j}}^-}{2}, \frac{\varphi_{y_{i,j}}^+ + \varphi_{y_{i,j}}^-}{2}\right) - \\ & \alpha_x \frac{\varphi_{x_{i,j}}^+ - \varphi_{x_{i,j}}^-}{2} - \alpha_y \frac{\varphi_{y_{i,j}}^+ - \varphi_{y_{i,j}}^-}{2} \quad (18) \end{aligned}$$

其中

$$\alpha_x = \max_{\substack{\varphi_x \in I(\varphi_x^-, \varphi_x^+) \\ \varphi_y \in [\varphi_y^-, \varphi_y^+]}} |H_{\varphi_x}|, \quad \alpha_y = \max_{\substack{\varphi_y \in I(\varphi_y^-, \varphi_y^+) \\ \varphi_x \in [\varphi_x^-, \varphi_x^+]}} |H_{\varphi_y}|,$$

$$I(a, b) = [\min(a, b), \max(a, b)], \quad (19)$$

本文利用 Ghost 方法将 Level Set 函数与物理量的控制方程进行耦合, 详见文 [10]。本文在时间方向采用三阶 R-K 方法。

3 数值结果

一个 Mach 数为 1.22 的激波通过一个气泡相遇, 无量纲计算区域 $(0, 325) \times (-44.5, 44.5)$ 。网格为 325×81 , 无量纲化初值条件是

$$\begin{aligned} x > 225: & \rho = 1.3746, \quad u = -0.394, \\ & v = 0, \quad p = 1.5698; \\ x \leq 225: & \rho = 1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad p = 1; \\ (x - 175)^2 + y^2 \leq 25^2: & \rho = 3.1538, \\ & u = 0, \quad v = 0, \quad p = 1 \end{aligned}$$

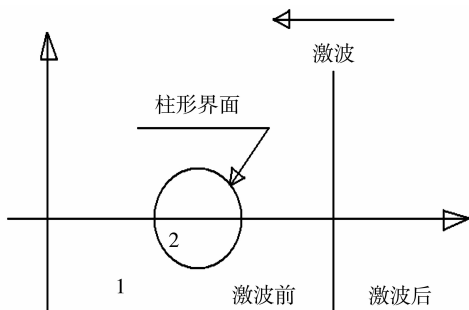


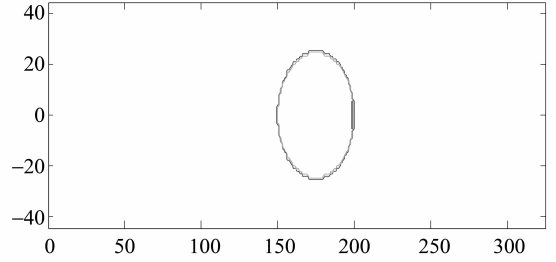
图 4 初始时刻流场示意图

Fig. 4 Schematic of flow field at the beginning time

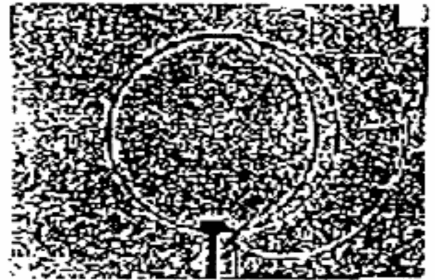
Level Set 方程的初值条件为

$$\varphi(x, y, 0) = \sqrt{(x - 175)^2 + y^2} - 25$$

边界条件: 左边界取出流边界条件, 右边界取入流边界条件, 即给定激波后的压力、密度和速度值, 上、下边界取固壁边界条件。由图 5 给出 $t = 18$ 时刻的密度分布图并与实验结果相比较。图 6 给出 $t = 38$ 时刻的密度分布图并与实验结果进行比较。



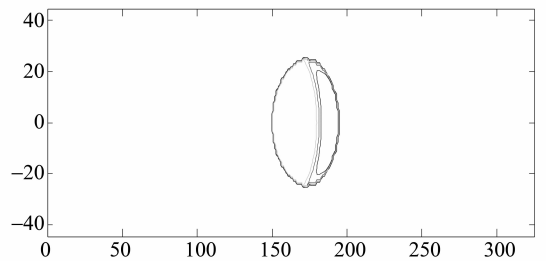
(a) 本文计算结果



(b) 文 [12] 的实验图像

图 5 $t = 18$ 时刻的等密度分布图

Fig. 5 Density contours ($t = 18$)



(a) 本文计算结果

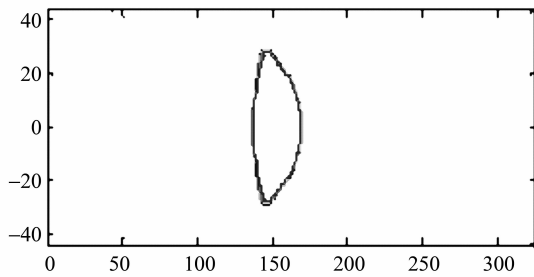


(b) 文 [12] 的实验图像

图 6 $t = 38$ 时刻的等密度分布图

Fig. 6 Density contours ($t = 36$)

图 7、图 8 分别给出不同时刻的密度分布图。本文与 Hass^[12] 等人的实验结果相比较发现, 模拟出来的气泡变形与实验图形基本相符合, 当激波与气泡相互作用时, 产生了折射波和反射波, 在激波扫后界面被压扁, 并随时间的推移, 气泡的右边基本保持原来的形状, 而左边凹陷。本方法在激波与柱形界面相互作用的计算中取得良好的结果, 数值结果与实验是吻合的。



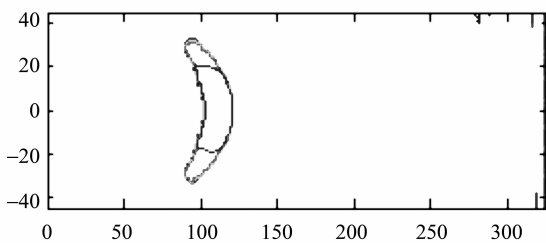
(a) 本文计算结果



(b) 文 [12] 的实验图像

图 7 $t = 108$ 时刻的等密度分布图

Fig. 7 Density contours ($t = 108$)



(a) 本文计算结果



(b) 文 [12] 的实验图像

图 8 $t = 320$ 时刻的等密度分布图

Fig. 8 Density contours ($t = 320$)

4 结 论

本文基于迎风紧致群速度控制方法求解流场控制方程, 采用群速度方法克服激波附近非物理振荡, 采用 Level Set 方法追踪运动界面。本方法在激波与柱形界面相互作用的计算中取得良好的结果, 数值结果与实验是吻合的。

参考文献:

- [1] YEE H C, WARMING R F, HARTEN A. Implicit total variation diminishing TVD schemes for steady-state calculations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, 57 (3): 327 - 360.
- [2] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71 (2): 231 - 303.
- [3] SHU C W. Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes [J]. *Journal of Scientific Computing*, 1990, 5 (2): 127 - 149.
- [4] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115 (1): 200 - 212.
- [5] LOMBARD C K, BARDINA J, VENKATAPATHY E, et al. Multi-dimensional formulation of CSCM—an upwind flux difference eigenvector split method for the compressible Navier-Stokes equations [C]// New York: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1983: 649 - 664.
- [6] 张涵信. 无波动无自由参数的耗散差分格式 [J]. *空气动力学报*, 1988, 2: 143 - 165.
- [7] 马延文, 傅德薰. 计算空气动力学中一个新的激波捕捉—耗散比拟法 [J]. *中国科学: A 辑 (数学)*, 1992, 35 (3): 263 - 271.
- [8] FU D X, MA Y W. A high order accurate difference scheme for complex flow fields [J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, 134: 1 - 15.
- [9] ZHU Q Y, LI Y. An upwind compact approach with group velocity control for compressible flow fields [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, 44: 463 - 482.
- [10] FEDKIW R, ASLAM T, MERRIAN B, et al. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flow (the ghost fluid method) [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152 (2): 457 - 492.
- [11] 傅德薰. 流体力学数值模拟 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
- [12] HASS J F, STURTEVANT B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, 181: 41 - 76.